Bases d'ondelettes

Gilles Chardon

CentraleSupélec

Bases d'ondelettes

Objectif : construire une base orthogonale de L^2 de la forme

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)$$

Base orthogonale :

$$f = \sum_{j,k} d_{j,k}\psi_{j,k}$$

Les coefficients sont donnés par

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k}\rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t)\psi_{j,k}(t)dt$$

Les ondelettes sont orthogonales

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \text{ et } k = k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Bases d'ondelettes

Propriétés intéressantes pour la représentation de signaux non-stationnaires, en particulier de signaux lisses par morceaux.

Quelques applications :

- compression (JPEG2000)
- débruitage
- problèmes inverses
- etc.

Exemple sur une image

Image reconstruite à partir de 10% de ses coefficients d'ondelettes

Plan

1. Approximations multi-résolutions
2. Caractérisation et construction des ondelettes
3. Moments nuls et support
4. Quelques familles d'ondelettes
5. Transformée en ondelettes rapide
6. Ondelettes 2D
7. Ondelettes biorthogonales

Définition d'une AMR

Définition

Une Approximation Multi-Résolution est une suite d'espace fermés V_j de L^2 vérifiant :

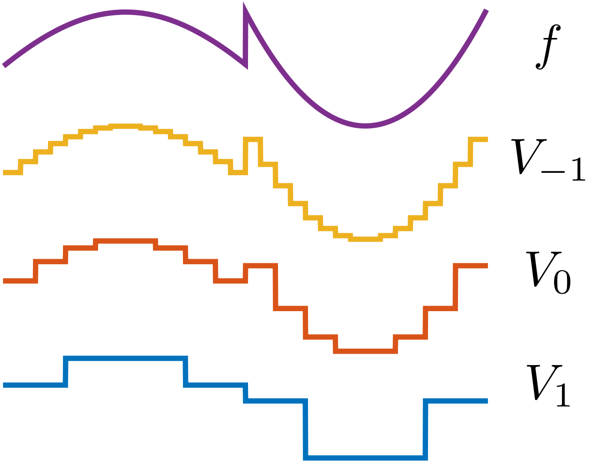
- $V_j \subset V_{j-1}$
- $\lim_{j\to-\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2$
- $\lim_{j\to\infty} V_j = \bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$
- $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$
- $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t/2) \in V_{j+1}$
- il existe une base orthogonale de V_0 de la forme $\phi_k(t) = \phi_0(t-k)$. ϕ est la *fonction d'échelle* de l'AMR.

Les espaces V_j donnent des approximations de plus en plus fines quand $j \to -\infty$.

Exemple : AMR Haar

Les espaces V_j sont définis par

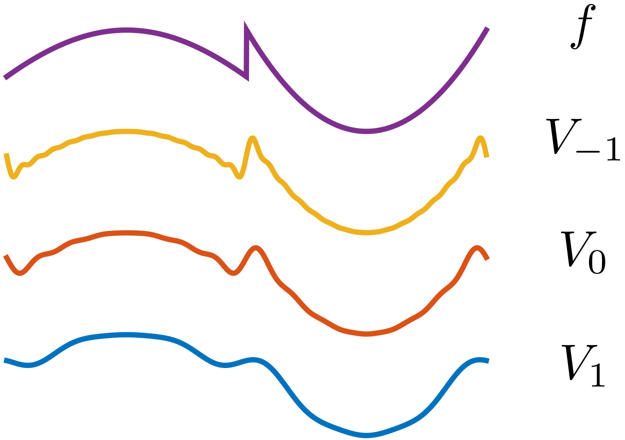
$$V_j = \{f, f \text{ constante sur } [k2^j, (k+1)2^j]\}$$



Exemple : AMR Shannon

Les espaces V_j sont définis par

$$V_j = \{f, \hat{f} \text{ nulle en dehors de } [-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]\}$$



Espaces de détail

Les espaces de détails W_j sont définis par

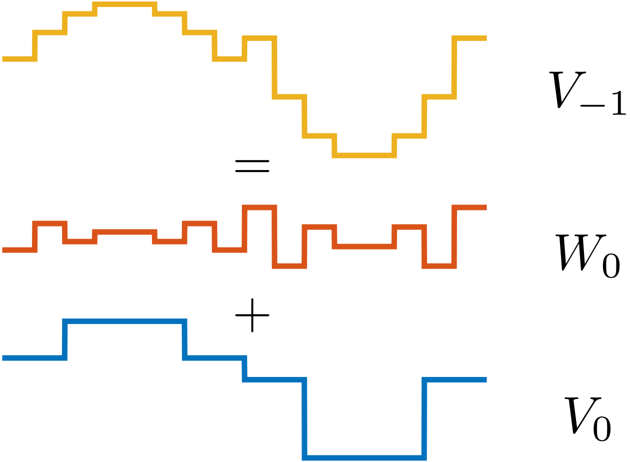
$$W_j \oplus V_j = V_{j-1}$$

Ils contiennent les détails nécessaires pour approximer le signal à une échelle plus petite (et seulement ces détails).

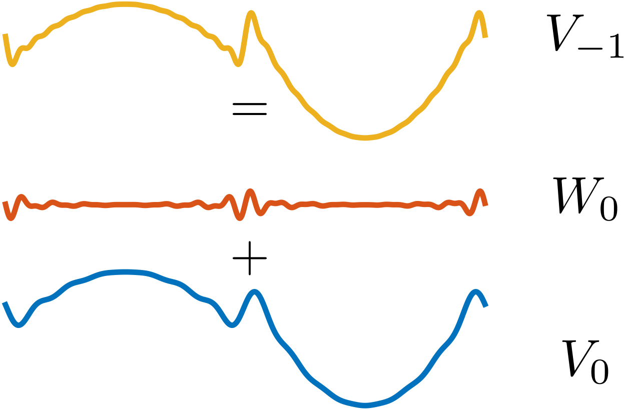
Quelques propriétés :

- $j \neq k \Rightarrow W_j \perp W_k$
- $L^2 = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j$
- $L^2 = V_J + \bigoplus_{j \leq J} W_j$

Espaces de détails : Haar

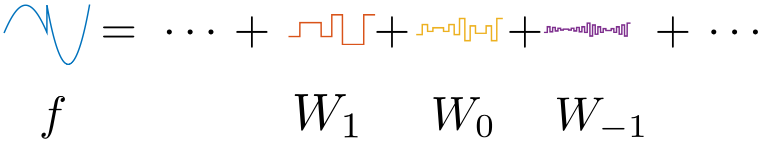


Espaces de détails : Shannon

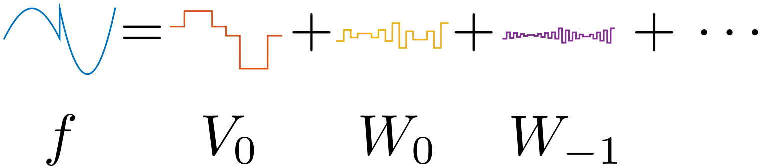


Décomposition de L^2

$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} P_{W_j} f$



$f = P_{V_J} + \sum_{j \leq J} P_{W_j} f$



$P_V =$ projection orthogonale sur V

Bases d'ondelettes

Construire une base d'ondelette revient à construire une base orthogonale $\psi_{j,k}$ pour chacun des W_j.

Une base d'ondelette est la réunion de toutes ces bases.

Par les propriétés des W_j, il suffit de trouver une fonction ψ, et

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-2^jk}{2^j}\right).$$

Partie suivante : recherche de conditions nécessaires et suffisantes sur ϕ, et construction de ψ à partir de ϕ.

Plan

Caractérisation des fonctions d'échelle

On définit le filtre h par ses coefficients :

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \langle \phi_{1,0}, \phi_{0,n} \rangle && (1) \\
&= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) \phi(t-n) dt && (2)
\end{aligned}
$$

Les $h[n]$ sont les coefficients de $\phi_{1,0} \in V_1 \subset V_0$ dans la base de V_0 :

$$\phi_{1,0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in Z} h[n] \phi(t-n)$$

Les TF de h et ϕ vérifient

$$\sqrt{2}\hat{\phi}(2\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{\phi}(\omega)$$

Caractérisation des fonctions d'échelles

Caractérisation de h

Si ϕ est la fonction d'échelle d'une AMR, alors h est un *filtre miroir conjugué* :

- $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$
- $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$

Réciproquement, si h est un filtre miroir conjugué, et

$$\min_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0$$

alors la fonction ϕ définie par sa transformée de Fourier

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega 2^{-p})}{\sqrt{2}}$$

est la fonction d'échelle d'une AMR.

Caractérisation des ondelettes

On définit le filtre g par ses coefficients :

$$g[n] = \langle \psi_{1,0}, \phi_{0,n} \rangle \tag{3}$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) \phi(t-n) dt \tag{4}$$

Les $h[n]$ sont les coefficients de $\psi_{1,0} \in W_1 \subset V_0$ dans la base de V_0.

$$\psi_{1,0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in Z} g[n] \phi(t-n)$$

Les TF de g, ϕ et ψ vérifient

$$\sqrt{2}\hat{\psi}(2\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{\phi}(\omega)$$

Caractérisation des ondelettes

Caractérisation de g

Si ψ est telle que $\psi(t-n)$ est une base orthogonale de l'espace de détails W_0 de l'AMR associée à ϕ, alors

- $|\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega+\pi)|^2 = 2$
- $\hat{h}(\omega)\hat{g}^\star(\omega) + \hat{h}(\omega+\pi)\hat{g}^\star(\omega+\pi) = 0$

On prend généralement

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\hat{h}^\star(\omega+\pi)$$

Équivalent à

$$g[n] = (-1)^{-1-n}h[1-n]$$

Construction d'une base d'ondelettes

- Choix d'un filtre miroir conjugué h
- construction de ϕ à partir de $\hat{\phi}$:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega 2^{-p})}{\sqrt{2}}$$

- construction de ψ à partir de $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega)\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega/2} \hat{h}^{\star}(\omega/2 + \pi)\hat{\phi}(\omega/2)$$

Base d'ondelettes de Haar

- Fonction d'échelle :

$$\phi = \mathbf{1}_{[0,1]}$$

- Filtre h :

$$h[n] = \begin{cases} \sqrt{2}/2 & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

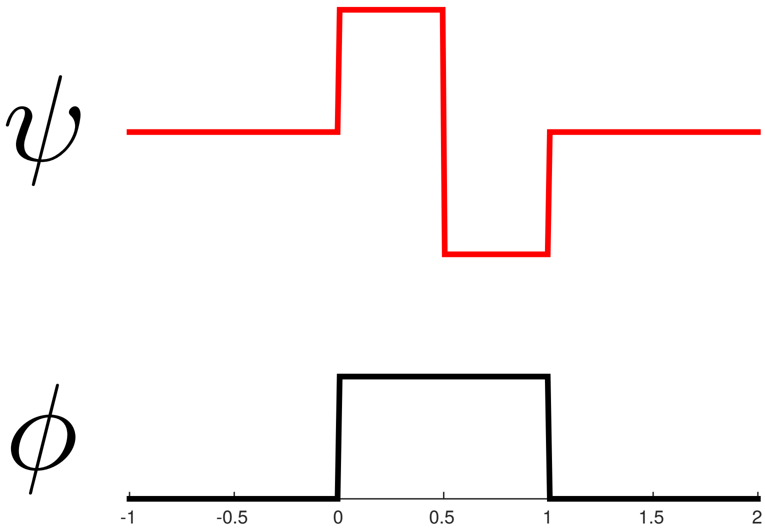
- Filtre g :

$$g[n] = \begin{cases} -\sqrt{2}/2 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

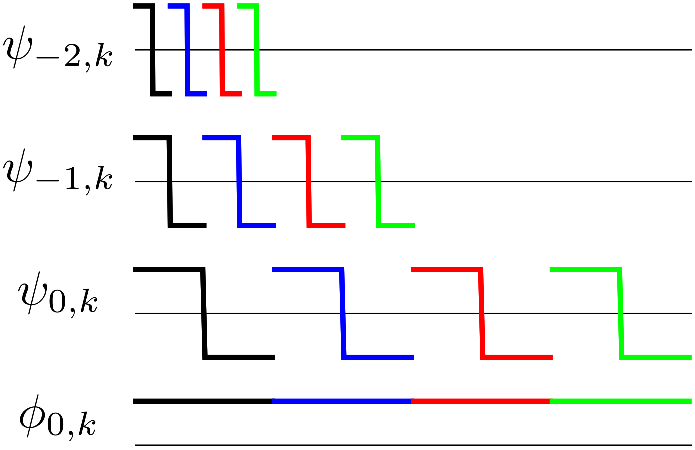
- Ondelette

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Base d'ondelettes de Haar



Base d'ondelettes de Haar



Base d'ondelettes de Shannon

- Fonction d'échelle :

$$\phi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi}$$

- Filtre h :

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}\mathbf{1}_{-\pi/2,\pi/2}$$

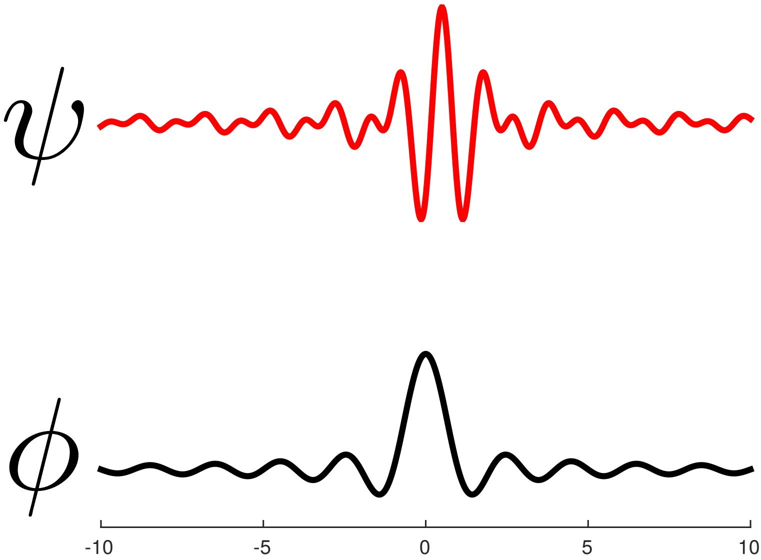
- Filtre g :

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega/2} & \text{si } \omega \in [-2\pi, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

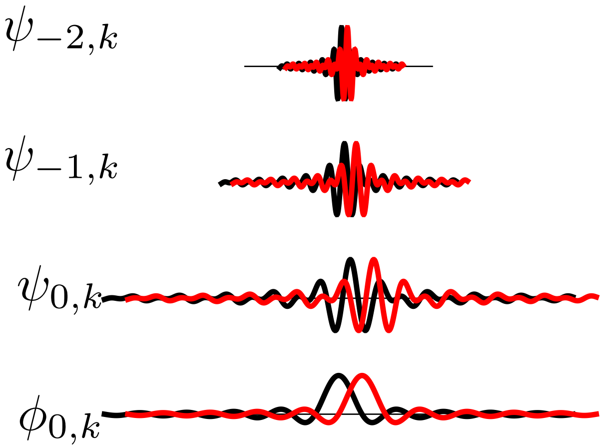
- Ondelette

$$\psi(t) = \frac{\sin(2\pi(t-1/2))}{\pi(t-1/2)} - \frac{\sin(\pi(t-1/2))}{\pi(t-1/2)}$$

Base d'ondelettes de Shannon



Base d'ondelettes de Shannon



Plan

Moments nuls

Une ondelette est intéressante si elle a des *moments nuls* :

Moments nuls

On dit qu'une ondelette a p moments nuls si, pour $0 \leq m < p$,

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t) t^m = 0$$

Intérêt : si une fonction f est de classe C^m, $m < p$, sur le support d'une ondelette $\psi_{j,k}$, alors

$$\langle \psi_{j,k}, f \rangle = \int_R \psi_{j,k}(t) f(t) \approx \int_{\mathbf{R}} \psi_{j,k}(t) \left(\sum_{l=0}^{m} a_l t^l \right) = 0$$

Si une fonction ressemble à un polynôme d'ordre p sur un intervalle, les coefficients des ondelettes dont le support est inclus dans cette intervalle sont nuls.

Caractérisation des moments nuls

Le nombre de moments nuls d'une ondelette se lit dans le filtre h :

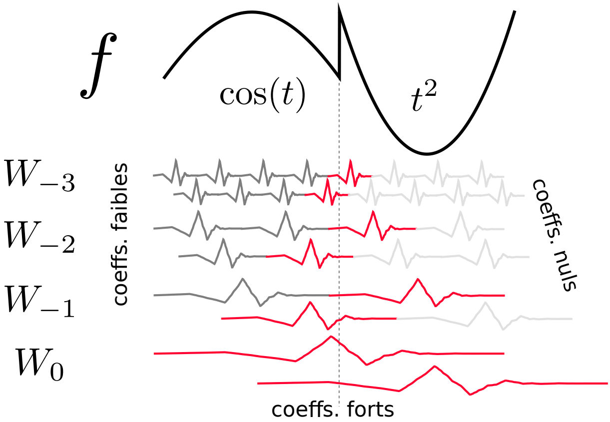
Caractérisation des moments nuls

Il y a équivalence entre

- l'ondelette ψ a p moments nuls
- $\hat{\psi}(\omega)$ et ses $p-1$ premières dérivées sont nulles en $\omega = 0$,
- $\hat{h}(\omega)$ et ses $p-1$ premières dérivées sont nulles en $\omega = \pi$.

Moments nuls

Moments nuls + fonction régulière par morceaux = parcimonie
Exemple avec 3 moments nuls :



Taille du support

Conséquence : on voudrait des ondelettes avec beaucoup de moments nuls et le plus petit support.

La taille du support et le nombre de moments nuls ne sont pas indépendants :

Théorème (Daubechies)

Si une ondelette a p moments nuls, alors

- h et g ont au moins $2p$ coefficients non nuls
- ϕ et ψ ont un support de taille au moins $2p - 1$.

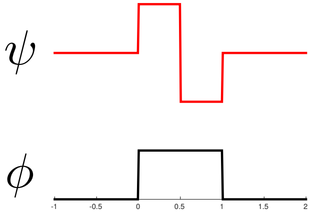
Compromis à trouver entre moments nuls et taille du support.

Borne atteinte par les ondelettes de Daubechies.

Plan

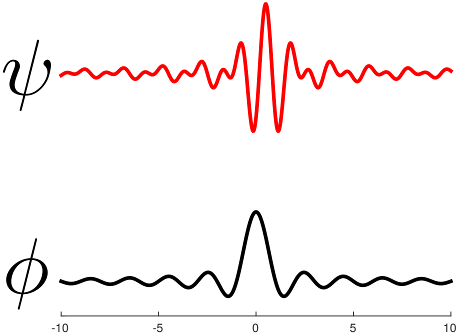
Ondelettes de Haar

- Exemple historique (1909).
- Les ondelettes les plus simples.
- Correspondent à une AMR de fonctions constantes par morceaux.
- Support le plus petit possible
- Un seul moment nul (inutile, toutes les ondelettes sont de moyenne nulles).



Ondelettes de Shannon

- Infini moments nuls
- mais support infini
- et décroissance très lente



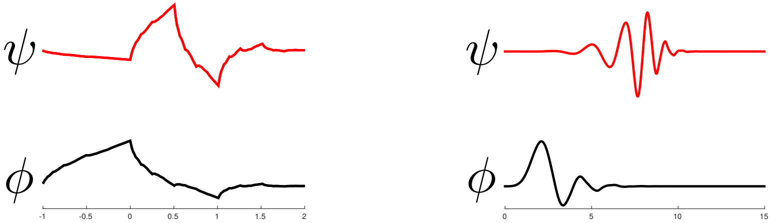
Ondelettes de Daubechies

Ondelettes à support compact avec nombre specifié de moments nuls.

`dbN` $= N$ moments nuls

Idée de la construction : trouver $\hat{h}(\omega)$ polynôme de $e^{-i\omega}$ vérifiant les propriétés des filtres miroirs conjugués et les CNS pour avoir des moments nuls.

Ondelettes `db2` et `db8` :

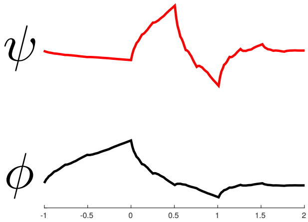


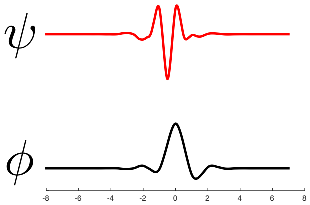
Symlets

Pas d'ondelettes à support compact et moments nuls (anti)symétriques (sauf Haar)

Variations des ondelettes de Daubechies avec choix judicieux de $\hat{h}(\omega)$ pour être les plus (anti)symétriques possible.

Ondelettes `sym2` et `sym8` :





Et encore...

- Ondelettes de Meyer : infinis moments nuls et décroissance rapide (inventées en essayant de montrer que c'était impossible)
- Ondelettes de Battle-Lemarié : correspondent à une AMR de splines (fonctions polynomiales par morceaux avec raccordement régulier)
- Coiflets : ondelettes *et* fonctions d'échelles ont des moments nuls.
- etc.

Plan

Calcul itératif des coefficients

On suppose connus les coefficients de l'approximation d'une fonction f dans l'espace V_0

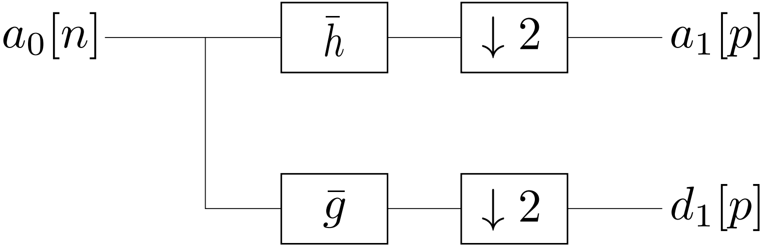
$$a_0[n] = \langle f, \phi_{0,n} \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t)\phi(t-n)$$

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \text{ détails aux échelles fines} \\ &\approx \sum_n a_0[n]\phi_{0,n} \end{aligned}$$

On peut calculer les coefficients $a_1[p]$ et $d_1[p]$ dans la base de V_1 et W_1 de façon itérative:

$$f_0 = \sum_n a_1[p]\phi_{1,p} + \sum_n d_1[n]\psi_{1,p}.$$

Calcul itératif des coefficients



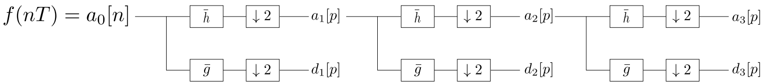
$\bar{h}[p] = h[-p], \bar{g}[p] = g[-p]$

Calcul pratique d'une transformée en ondelettes

Initialisation : on dispose généralement d'une discrétisation du signal à représenter, avec une période d'échantillonnage de T. On pose

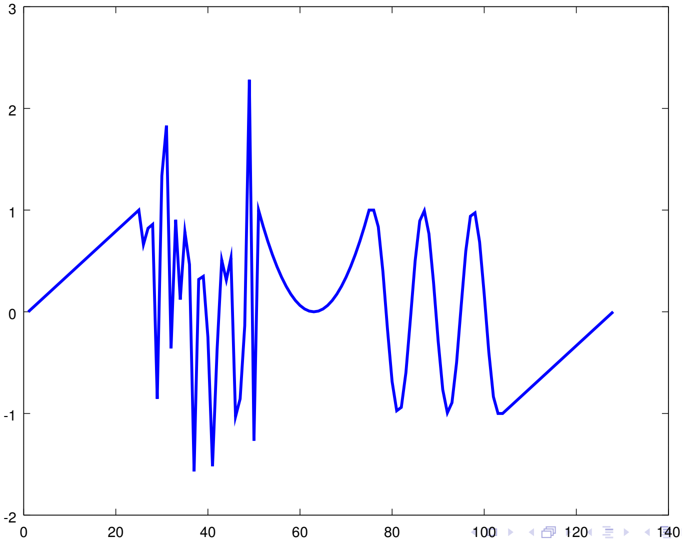
$$a_0[p] = f(pT)$$

(particulièrement vrai pour les coiflets).
On itère le filtrage ad libitum.
Pas besoin des expressions (compliquées) de ψ et ϕ, g et h suffisent.



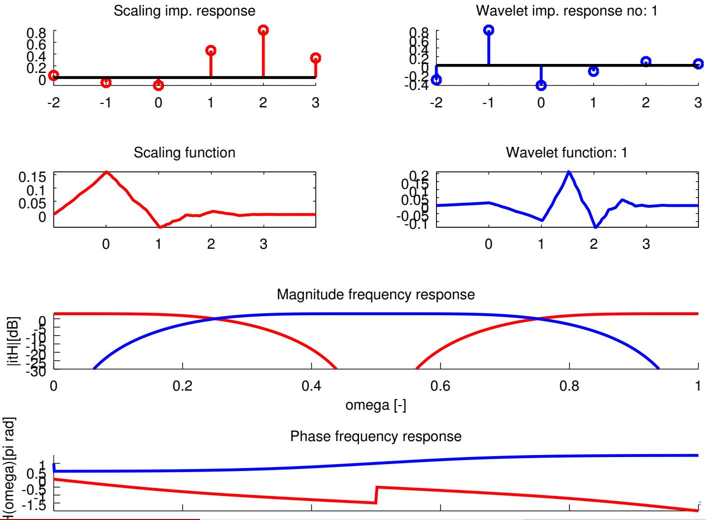
Exemple de transformée

Signal présentant des parties polynomiales.

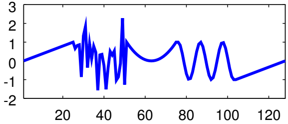


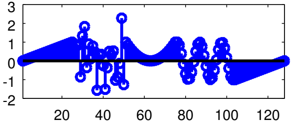
Ondelettes Daubechies db3

Les ondelettes db3 ont 3 moments nuls. Les coefficients d'ondelettes seront nulles sur les parties polynomiales.

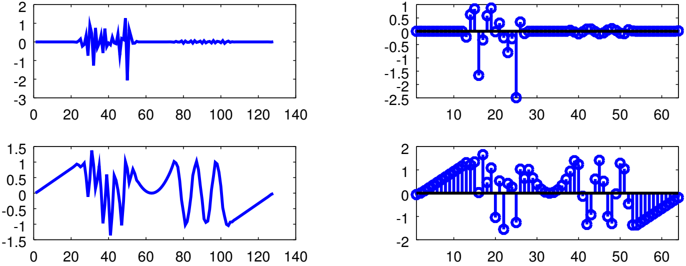


Initialisation

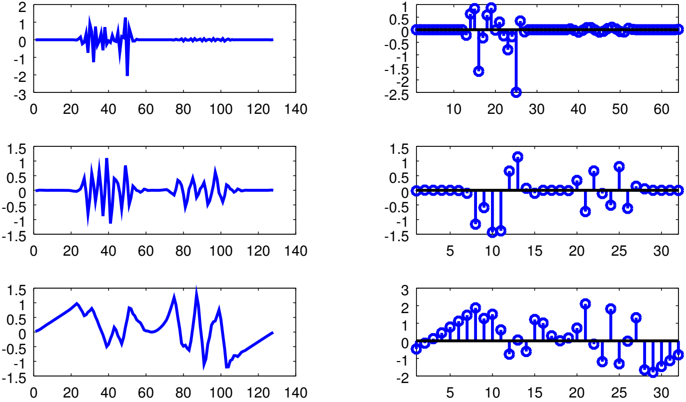




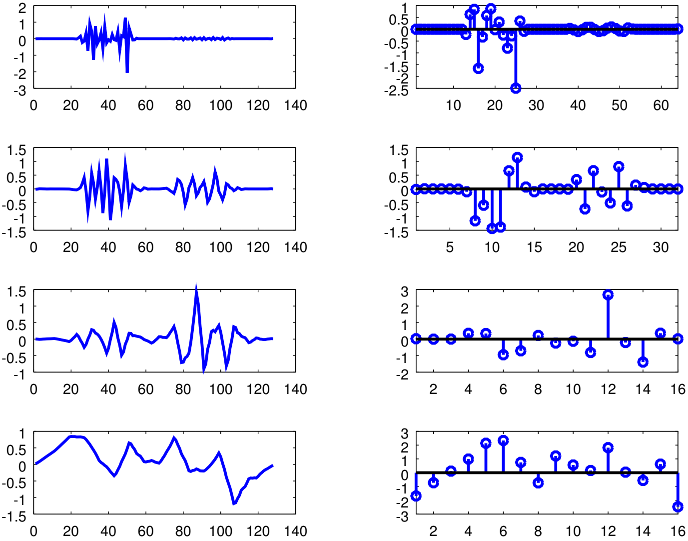
Première itération



Deuxième itération

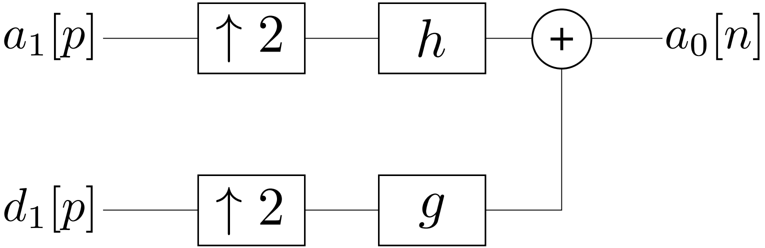


Troisième itération



Transformée inverse

Chemin inverse



Plan

Ondelettes 2D

Base séparable d'ondelettes : on se fixe une famille d'ondelettes 1D, fonction d'échelle ϕ, ondelette ψ.
Fonction d'échelle 2D :

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

Ondelette BF/HF :

$$\psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

Ondelette HF/BF :

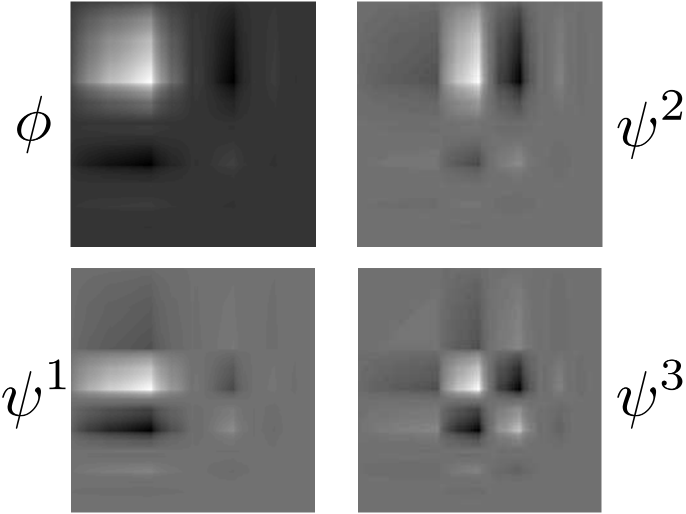
$$\psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y)$$

Ondelette HF/HF :

$$\psi^1(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

Ondelettes 2D

Ondelettes `db2`

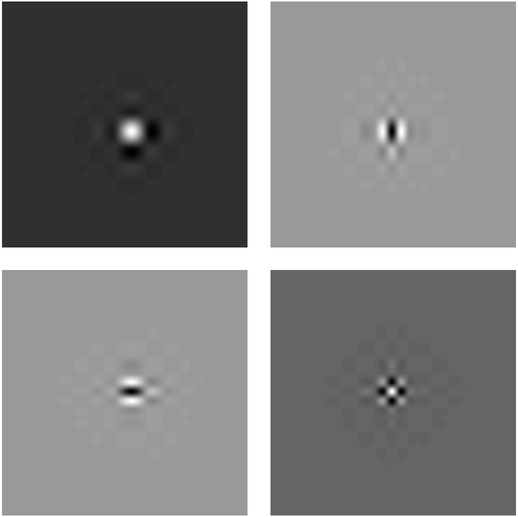


Ondelettes 2D

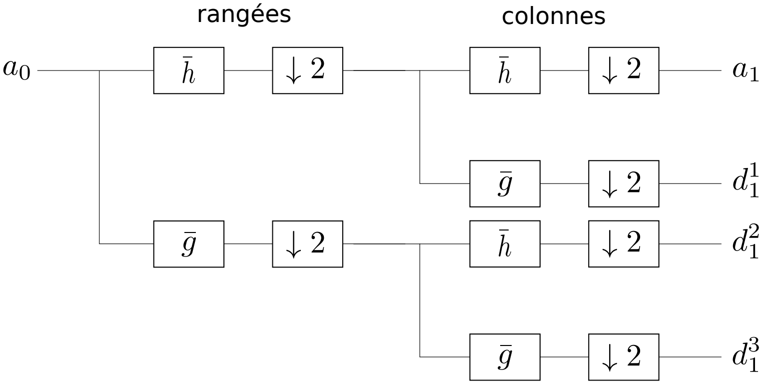
Ondelettes `sym8`

ϕ ψ^2

ψ^1 ψ^3



Transformée en ondelettes 2D



Transformée en ondelettes 2D - exemple

Transformée en ondelettes 2D - une itération

Transformée en ondelettes 2D - deux itération

Transformée en ondelettes 2D - trois itération

Plan

Ondelettes biorthogonales

Pour diverses raisons, il est préférable d'avoir des ondelettes (anti)symétriques :

- invariance par renversement du temps
- gestion des bords

Il n'existe pas d'ondelettes réelles orthogonales à support compact et moments nuls (excepté Haar...).

Solution : relâcher la condition d'orthogonalité, et utiliser des *ondelettes birothogonales*.

Ondelettes biorthogonales

Au lieu d'une seule famille d'ondelettes, on se fixe deux familles ψ et $\tilde{\psi}$, qui vérifient :

$$\left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \text{ et } k = k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si

$$f = \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

Alors

$$d_{j,k} = \left\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \right\rangle.$$

Construction des ondelettes biorthogonales

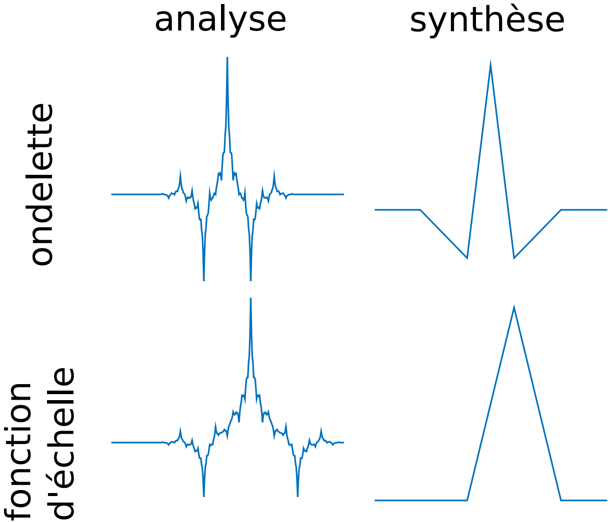
Construction similaire aux ondelettes orthogonales. Il faut trouver deux filtre h et $\tilde{h}$ tels que

$$\hat{h}(\omega)\widehat{\tilde{h}}^{\star}(\omega) + \hat{h}(\omega+\pi)\widehat{\tilde{h}}^{\star}(\omega+\pi) = 2$$

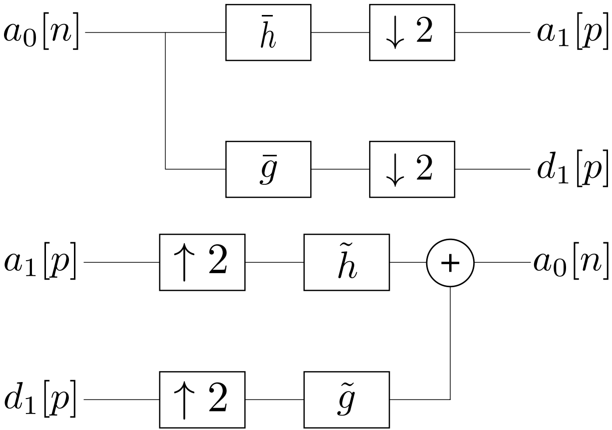
(Condition non suffisante).
Ondelettes CDF : base biorthogonale d'ondelettes à support compact et moments nuls (anti)symétriques.

Ondelettes CDF

Ondelettes utilisées dans JPEG2000



Banc de filtres pour ondelettes biorthogonales



Conclusion

Ondelettes adaptées au traitement des signaux non-stationnaires, en particulier présentant des singularités.
Beaucoup d'ondelettes différentes.

Propriétés importantes :

- taille du support
- moments nuls

Beaucoup de variantes : shearlets, curvelets, etc.
`http://www.laurent-duval.eu/siva-wits-where-is-the-starlet.html`

En pratique : toolbox Matlab ou LTFAT