

# Filtrage de Kalman

G. Chardon

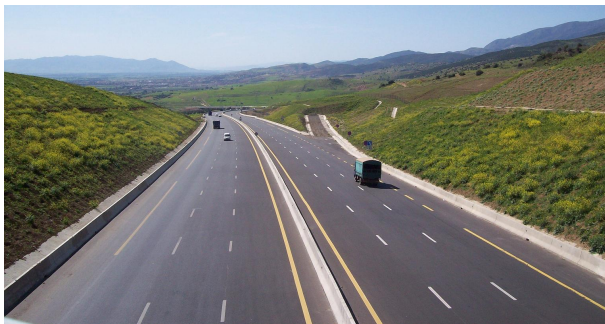
CentraleSupélec

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle de signaux
- 3 Filtre de Kalman
- 4 Exemples
  - Constante
  - Suivi de pendule
  - Suivi de véhicule
- 5 Extended Kalman filter
- 6 Conclusion

# Une voiture sur l'autoroute

Comment estimer sa position ?

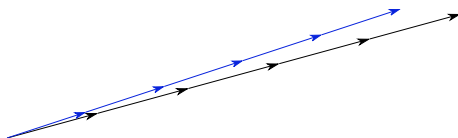


# Méthode 1 : modèle physique

On suppose la position initiale et la vitesse connues :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau$$

- estimation valide à court terme
- mais les erreurs s'accroissent

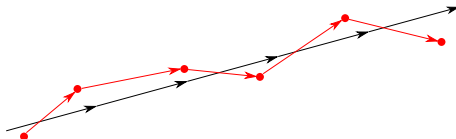


## Méthode 2 : méthode de localisation

Ex: GPS

À chaque instant  $t_n$ , une estimation  $\hat{x}_n$  de la position  $x(t_n)$  est disponible.

- estimation toujours fautive, mais pertinente “en moyenne”
- estimation de la vitesse ?



Le filtrage de Kalman fusionne les mesures et le modèle physique pour construire une meilleure estimation de l'état du système.

Deux manières de l'interpréter :

- recalage du modèle physique à partir des mesures
- ou décomposition des mesures en bruit + composante obéissant au modèle

# Cadre du filtrage de Kalman

Estimation de l'état d'un système au cours du temps,  
À partir d'observations incomplètes et bruitées,  
Connaissant un **modèle d'évolution** du système.

# Application historique

Années 1960, suivi de la trajectoire des modules Apollo

- estimation de la position à partir de mesures terrestres
- connaissance de l'accélération du module (centrale inertielle)

Fusion des deux types de données par le filtrage de Kalman.

Modèle physique = déplacement d'un point dans un champ de gravité et soumis à des forces (moteur).



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle de signaux**
- 3 Filtre de Kalman
- 4 Exemples
  - Constante
  - Suivi de pendule
  - Suivi de véhicule
- 5 Extended Kalman filter
- 6 Conclusion

# Modèle d'évolution

L'état  $x_k$  à estimer est un vecteur à  $n$  composantes.

Connaissance d'un modèle **linéaire** d'évolution de l'état

$$x_{k+1} = Fx_k + u_k$$

$F$  matrice  $n \times n$

$u_k$  bruit blanc gaussien de moyenne nulle de covariance connue  $Q$  de taille  $n$ .

$F$  et  $Q$  peuvent varier au cours du temps.

La forme de l'état est un **choix**. Il n'est pas limité aux grandeurs d'intérêt.

# Modèle d'évolution : exemple de la voiture

On veut mesurer la position du véhicule.

Pour écrire le modèle d'évolution, on rajoute la vitesse dans l'état.

Le modèle d'évolution est alors donné par

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{k+1}^x \\ v_{k+1}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ v_k^x \\ v_k^y \end{pmatrix} + u_k$$

# Modélisation des mesures

On a, à chaque instant,  $m$  mesures qui sont obtenues par une transformation linéaire de l'état :

$$y_k = Hx_k + v_k$$

$H$  matrice connue de taille  $m \times n$ , qui modélise le processus de mesure.

Remarque :  $m$  peut être plus petit que  $n$ , i.e. moins de mesures que la dimension de l'état.

$v_k$  bruit blanc gaussien de moyenne nulle de covariance connue  $R$  de taille  $m$ .

$H$  et  $R$  peuvent varier au cours du temps.

# Modélisation des mesures : exemple de la voiture

Le GPS donne une mesure de la position :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ v_k^x \\ v_k^y \end{pmatrix} + v_k$$

# Bruit de modèle et bruit de mesure

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + u_k \\ y_k = Hx_k + v_k \end{cases}$$

Les bruits  $u_k$  et  $v_k$  modélisent la confiance dans le modèle et les mesures.

- petit bruit de modèle : on voudra faire confiance au modèle et peu aux mesures,
- petit bruit de mesure : on voudra donner une influence plus importante aux mesures.

Le filtre de Kalman va automatiquement donner un poids plus ou moins fort au modèle ou aux mesures pour l'estimation de l'état.

Il donne à la fois une estimation de l'état, et la covariance de l'erreur d'estimation.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle de signaux
- 3 Filtre de Kalman**
- 4 Exemples
  - Constante
  - Suivi de pendule
  - Suivi de véhicule
- 5 Extended Kalman filter
- 6 Conclusion

# Idée générale du filtre de Kalman

Estimer l'état à l'instant  $k + 1$  à partir d'une estimation à l'instant  $k$  et des mesures à l'instant  $k + 1$ .

Estimation en deux étapes :

- prédiction de l'état à partir du modèle d'évolution
- correction de la prédiction à partir des mesures

Hypothèse :

- tout est gaussien
- manipulation de l'estimation de l'état sous forme moyenne + covariance



# Notations

$x_k$  état à l'instant  $k$ .

$y_k$  mesures à l'instant  $k$ .

$\hat{x}_{k,k}$  estimation de l'état  $k$  à partir des données jusque l'instant  $k$

covariance  $P_{k,k} = E((\hat{x}_{k,k} - x_k)(\hat{x}_{k,k} - x_k)^*)$

$\hat{x}_{k+1,k}$  estimation de l'état  $k + 1$  à partir des données jusque l'instant  $k$

covariance  $P_{k+1,k} = E((\hat{x}_{k+1,k} - x_k)(\hat{x}_{k+1,k} - x_k)^*)$

$Q = E(uu^*)$  covariance du bruit de modèle

$R = E(vv^*)$  covariance du bruit de mesure

# Prédiction

Rappel :  $x_{k+1} = Fx_k + u_k$

L'estimation a priori est donnée par

$$\hat{x}_{k+1,k} = E(Fx_k + u_k) = F\hat{x}_{k,k}$$

La covariance  $P_{k+1,k}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{k+1,k} &= E[(\hat{x}_{k+1,k} - x_{k+1})(\hat{x}_{k+1,k} - x_{k+1})^*] \\ &= FP_{k,k}F^* + Q \end{aligned}$$

L'estimation a priori  $x_{k+1,k}$  est généralement plus incertaine que  $x_{k,k}$ .

## Correction

On définit l'innovation comme la différence entre les mesures observées et les mesures attendues :

$$z_{k+1} = y_{k+1} - H\hat{x}_{k+1,k}$$

La correction apportée à  $\hat{x}_{k+1,k}$  est **choisie** sous la forme linéaire  $K_{k+1}z_{k+1}$  :

$$\hat{x}_{k+1,k+1} = \hat{x}_{k+1,k} + K_{k+1}(y_{k+1} - H\hat{x}_{k+1,k})$$

$K_k$  = gain de Kalman

La covariance  $P_{k+1,k+1}$  est donnée par

$$\begin{aligned} P_{k+1,k+1} &= (I - K_{k+1}H)P_{k+1,k}(I - K_{k+1}H)^* + K_{k+1}RK_{k+1}^* \\ &= P_{k+1,k} - K_{k+1}HP_{k+1,k} - P_{k+1,k}(K_{k+1}H)^* \\ &\quad + K_{k+1}(HP_{k+1,k}H^* + R)K_{k+1}^* \end{aligned}$$

# Calcul du gain de Kalman

Le gain  $K_{k+1}$  est choisi de telle sorte à minimiser l'erreur quadratique de l'estimation donnée par

$$\begin{aligned} E[(\hat{x}_{k+1,k+1} - x_{k+1})^*(\hat{x}_{k+1,k+1} - x_{k+1})] &= \text{tr } E[(\hat{x}_{k+1,k+1} - x_{k+1})^*(\hat{x}_{k+1,k+1} - x_{k+1})] \\ &= \text{tr } E[(\hat{x}_{k+1,k+1} - x_{k+1})(\hat{x}_{k+1,k+1} - x_{k+1})^*] \\ &= \text{tr } P_{k+1,k+1} \end{aligned}$$

L'erreur d'estimation de  $\hat{x}_{k+1,k+1}$  est minimale quand

$$\frac{\partial \text{tr } P_{k+1,k+1}}{\partial K_{k+1}} = 0$$

Cette notation désigne les dérivées partielles du scalaire  $\text{tr } P_{k+1,k+1}$  par rapport aux termes de  $K_{k+1}$ , rangés dans une matrice de même forme que  $K_{k+1}$ .

# Gain de Kalman

On utilise  $\partial \text{tr}(AB)/\partial A = B$  et  $\partial \text{tr}(ACA)/\partial A = 2AC$  si  $C$  est symétrique.

$$\text{tr } P_{k+1,k+1} = \text{tr } P_{k+1,k} - 2\text{tr} (K_{k+1}HP_{k+1,k}) + \text{tr} (K_{k+1}(HP_{k+1,k}H^* + R)K_{k+1}^*)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{tr } P_{k+1,k+1}}{\partial K_{k+1}} &= -2(HP_{k+1,k})^* + 2K_{k+1}(HP_{k+1,k}H^* + R) \\ &= 0\end{aligned}$$

On obtient

$$K_{k+1} = P_{k+1,k}H^*(HP_{k+1,k}H^* + R)^{-1}$$

et

$$P_{k+1,k+1} = (I - K_{k+1}H)P_{k+1,k}$$

# Filtre de Kalman

Données : modèles  $F$  et  $H$ , covariances  $Q$  et  $R$ , conditions initiales  $\hat{x}_{0,0}$  et  $P_{0,0}$ .

Prédiction :

- $\hat{x}_{k+1,k} = F\hat{x}_{k,k}$
- $P_{k+1,k} = FP_{k,k}F^* + Q$

Correction :

- $K_{k+1} = P_{k+1,k}H^*(HP_{k+1,k}H^* + R)^{-1}$
- $\hat{x}_{k+1,k+1} = \hat{x}_{k+1,k} + K_{k+1}(y_{k+1} - H\hat{x}_{k+1,k})$
- $P_{k+1,k+1} = (I - K_{k+1}H)P_{k+1,k}$

# Initialisation

L'estimation initiale  $\hat{x}_{0,0}$  et sa variance  $P_{0,0}$  sont nécessaires mais pas toujours disponibles.

- si l'état initial  $x_0$  est connue avec certitude,  $x_{0,0} = x_0$  et  $P = 0$ .
- si possible, utiliser la première mesure et sa covariance.
- à défaut,  $x_{0,0} = 0$  et covariance  $P$  arbitrairement grande.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle de signaux
- 3 Filtre de Kalman
- 4 Exemples**
  - Constante
  - Suivi de pendule
  - Suivi de véhicule
- 5 Extended Kalman filter
- 6 Conclusion



# Un exemple très simple : estimation d'une constante

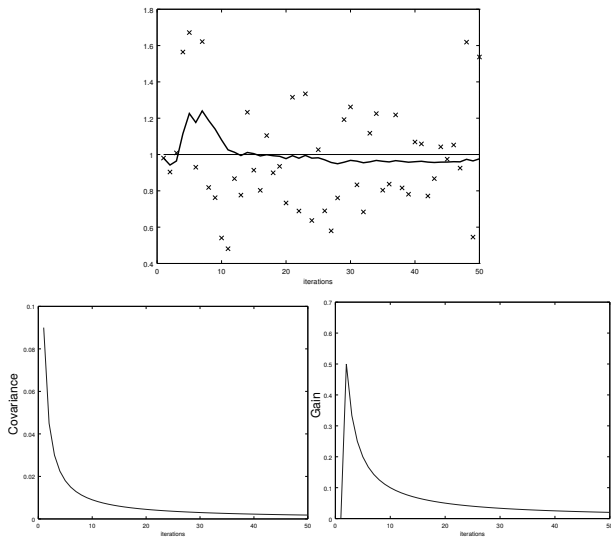
Modèle :

- $x_{k+1} = x_k + u_k$
- $y_k = x_k + v_k$

Filtre :

- $\hat{x}_{k+1,k} = \hat{x}_{k,k}$
- $P_{k+1,k} = P_{k,k} + \sigma_u^2$
- $K_{k+1} = P_{k+1,k}(P_{k+1,k} + \sigma_v^2)^{-1}$
- $\hat{x}_{k+1,k+1} = \hat{x}_{k+1,k} + K_{k+1}(y_{k+1} - \hat{x}_{k+1,k})$
- $P_{k+1,k+1} = (I - K_{k+1})P_{k+1,k}$

# Résultats

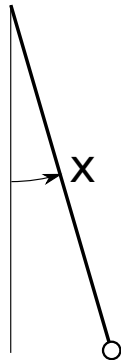


Au fil des itérations, le filtre de Kalman fait de plus en plus confiance à l'état du modèle, et utilise de moins en moins les mesures pour corriger cet état.

# Suivi de pendule

Estimation de la position angulaire d'un pendule au cours du temps.

**Modèle continu**



# Modèle continu

Le modèle d'évolution est ici donné sous une forme continue, i.e. un système d'équations différentielles ordinaires :

$$F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(p)}) = 0$$

Dans notre cas  $p = 2$  et :

$$\omega_0^2 x + \ddot{x} = 0$$

Ce modèle doit être réécrit

- sous la forme d'un système à l'ordre 1
- à temps discret

# Réécriture à l'ordre 1

L'état inclut  $x$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $p - 1$  :

$$X = (x, \dot{x}).$$

La dérivée  $\dot{X}$  s'écrit en fonction de  $X$  :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = AX$$

Système d'ordre 1 de dimension 2

$$\dot{X} = AX$$

# Évolution du système

L'évolution du système entre deux temps  $t_1$  et  $t_2$  est donnée par

$$X(t_2) = \exp((t_2 - t_1)A)X(t_1)$$

Exponentielle matricielle :

$$\exp(M) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{M^n}{n!}$$

Modèle discret :

$$x_{k+1} = \exp(A\Delta t)x_k$$

# Calcul de l'exponentielle matricielle

Si  $M$  est nilpotente :  $M^p = 0$ ,

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n!} M^n$$

Si  $M$  est diagonalisable :  $M = PDP^{-1}$

$$\exp(M) = P \exp(D) P^{-1}$$

et

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

# Suivi de pendule - modélisation

Modèle continu:

$$x\ddot{+}\omega_0^2x = 0$$

Formulation vectorielle d'ordre 1 avec  $X = (x, \dot{x})$ :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} X = AX$$

Diagonalisation de  $A = PDP^{-1}$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix}$$

Exponentielle de  $A$ :

$$F = \exp(A\Delta t) = P \exp(D\Delta t) P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \Delta t & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \Delta t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 \Delta t & \cos \omega_0 \Delta t \end{pmatrix}$$



# Suivi de pendule - modélisation

Modèle d'évolution discret :

$$F = \exp(A\Delta t) = P \exp(D\Delta t)P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \Delta t & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \Delta t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 \Delta t & \cos \omega_0 \Delta t \end{pmatrix}$$

On ne mesure que la position du pendule :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que l'incertude du modèle ne porte que sur la vitesse angulaire du pendule.

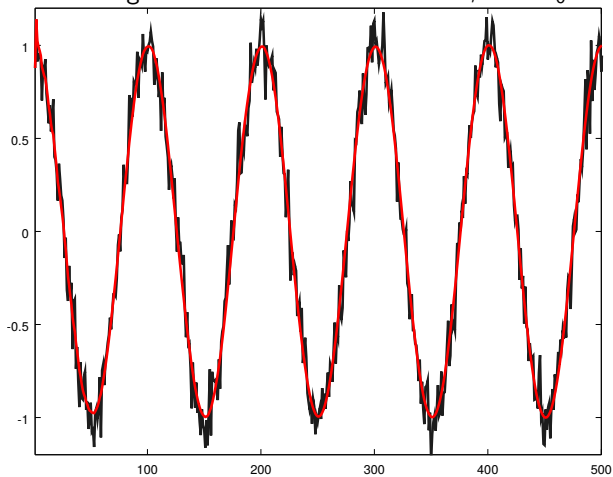
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Q^2 \end{pmatrix}$$

Les mesures sont bruitées :

$$R = \sigma_R^2$$

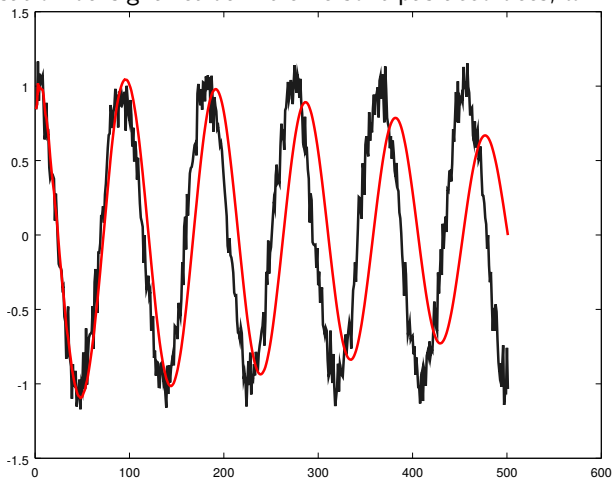
# Résultats

Cas où la pulsation du signal et du filtre sont en accord,  $\omega = \omega_0$



# Résultats

Cas où la pulsation du signal et du filtre ne sont pas accordées,  $\omega = 1.1\omega_0$



# Suivi de véhicule

On suppose maintenant qu'on connaît l'accélération du véhicule (par ex. centrale inertielle).

Le filtrage de Kalman va permettre de fusionner

- les informations sur l'accélération (précises à court terme mais dérive)
- la localisation par moyen externe (ex. GPS, toujours fausse, en moyenne correcte)

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{k+1}^x \\ v_{k+1}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ v_k^x \\ v_k^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t^2 a_k^x / 2 \\ \Delta t^2 a_k^y / 2 \\ \Delta t a_k^x \\ \Delta t a_k^y \end{pmatrix} + u_k$$

Note : dans ce cas particulier, on pourrait également inclure l'accélération dans le modèle. Il existe souvent plusieurs modélisations pertinentes d'un même système.

Plus généralement :

$$x_{k+1} = Fx_k + c_k$$

L'étape de prédiction devient :

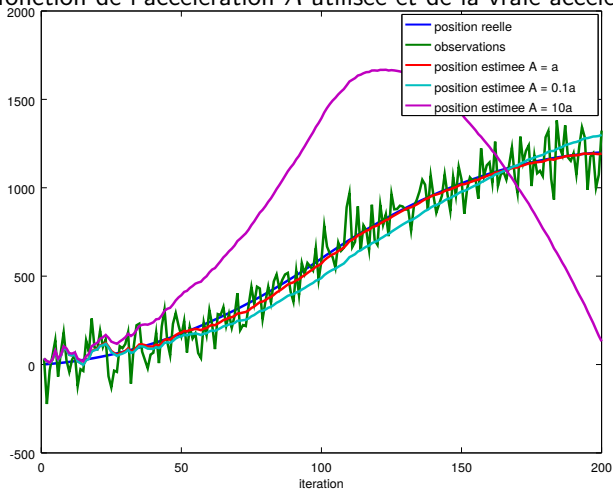
- $\hat{x}_{k+1,k} = F\hat{x}_{k,k} + c_k$
- $P_{k+1,k} = FP_{k,k}F^* + Q + C$

où  $C$  est la covariance de  $c_k$ .

L'étape de correction reste identique.

# Résultats

Résultats en fonction de l'accélération  $A$  utilisée et de la vraie accélération  $a$ .



# Extended Kalman filter

Extension au cas où le modèle n'est pas linéaire :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) + u_k \\ y_k = H(x_k) + v_k \end{cases}$$

Adaptation simple :

- on utilise directement  $F$  et  $H$  dans le calcul de l'état a priori et l'innovation
- on utilise les gradients de  $F$  et  $G$  pour le calcul des covariances et du gain de Kalman.

# Conclusion

Le filtre de Kalman est adapté aux situations où

- le système est linéaire
- les observations sont linéaires
- les erreurs sont des bruits blancs gaussiens additifs

Dans ce cas, le filtrage de Kalman est optimal.

Son implémentation est aisée et efficace.

Slides et code sur <http://gilleschardon.fr/fc/kalman/>.



- Kalman, Rudolph Emil, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, Vol. 82, Series D, pp.= 35-45, 1960
- A. H. Jazwinski, Stochastic process and filtering theory, Academic Press, New York, USA, 1970
- B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Optimal Filtering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1979
- Special Issue on applications of Kalman filtering, vol. AC-28 of IEEE Transactions on Automatic and Control, mars 1983